2020-21

Préparer la rentrée en mathématiques, à l'usage des futurs ECE1

Ce document a pour but de vous aider à revoir et à approfondir les techniques calculatoires que vous devriez maîtriser à la fin de votre année de terminale.

C'est effectivement en travaillant votre rapidité et vos réflexes en calculs que vous pourrez prendre de l'avance sur le travail qui vous attend en mathématiques l'année prochaine. Et pour acquérir ces réflexes et ces méthodes, un seul mot d'ordre : l'entraînement !

Ceci est d'autant plus important que la calculatrice est interdite lors des épreuves écrites et orales des concours. Apprenez donc à vous en passer.

Chaque notion travaillée est précédée de rappels de cours. Vous pouvez répartir ce travail sur plusieurs jours en traitant une notion par séance.

Gautier Delannoy et Anthony Mansuy
`Gautier.Delannoy@ac-reims.fr`
`mansuy.anthony@hotmail.fr`

Fraction de deux nombres réels

Soient a et b deux nombres réels, b **non nul**.
On rappelle que la **fraction** de a par b est le nombre réel noté $\dfrac{a}{b}$ vérifiant la relation $b \times \dfrac{a}{b} = a$.

Propriété 1 (Opérations sur les fractions)

Soient a, b, c, d, k des nombres réels.

(1) Si b est non nul, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$.

(2) Si b et d sont non nuls, $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}$.

(3) Si b et k sont non nuls, $\dfrac{a \times k}{b \times k} = \dfrac{a}{b}$.

(4) Si b, c et d sont non nuls, $\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \left(\dfrac{a}{b}\right) \times \left(\dfrac{d}{c}\right)$.

Exercice 1
Simplifier au mieux les expressions suivantes en les mettant sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \qquad B = \frac{3}{21} - \frac{2}{6} \qquad C = \frac{1}{24} - \frac{1}{16} \qquad D = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{6}$$

$$E = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{6} \qquad F = \frac{\frac{7}{15} + \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{12}{5}} \qquad G = \frac{\frac{6}{15} + 2 \times \frac{3}{10}}{\frac{1}{4} - \frac{2}{3}} \qquad H = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{12} \times \frac{9}{8}}{2 - \frac{4}{3}}$$

Puissance entière d'un nombre réel

On rappelle que, si a est un nombre réel non nul et n un entier naturel non nul, alors :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$$

Par convention, $a^0 = 1$. De plus, on note a^{-n} l'inverse de a^n, c'est-à-dire que $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Propriété 2 (Opérations sur les puissances)

Soient a et b deux nombres réels non nuls et m et n deux entiers relatifs. Alors :

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$; $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$.

(2) $a^m \times b^m = (a \times b)^m$; $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$.

Exercice 2
Simplifier au mieux les expressions suivantes :

$$A = 3^2 \times 3^{k+1} \qquad B = \frac{4^3}{2^7} \qquad C = \frac{7^{-5} \times 28}{2^5} \qquad D = 3^2 \times 5^3 \times 15^4$$

$$E = \frac{8^3}{4^2} \qquad F = \frac{10^{-5} \times (10^3)^7}{2^{-4} \times (2^5)^2} \qquad G = \frac{3^4}{2^5} + \left(\frac{6^2}{4^2}\right)^2 \qquad H = \frac{4^9 \times 3 + 4^{10}}{16^4}$$

Racine carrée d'un nombre réel positif

On rappelle que, si $a \geq 0$, la **racine carrée** de a est le nombre réel **positif**, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est égal à a :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a.$$

Propriété 3 (Opérations sur les racines carrées)

Soient a et b deux réels positifs. Alors :

(1) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.

(2) Si $b \neq 0$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Exercice 3
Simplifier au mieux les expressions suivantes :

$A = 4\sqrt{75} - 5\sqrt{300}$ $\quad B = 2\sqrt{27} + 3\sqrt{48}$ $\quad C = \dfrac{(3\sqrt{2})^2}{\sqrt{9 \times 10^2}}$

$D = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$ $\quad E = \dfrac{1}{3 - \sqrt{5}}$ $\quad F = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \times \sqrt{2 + \sqrt{3}}$

$G = \left(\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right)^2$ $\quad H = \dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ $\quad I = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Identités remarquables

Propriété 4 (Identités remarquables)

Soient a et b deux nombres réels quelconques. Alors :

- En degré 2,

$$\begin{array}{rcl} (a+b)^2 & = & a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 & = & a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 & = & (a+b)(a-b) \end{array}$$

- En degré 3,

$$\begin{array}{rcl} (a+b)^3 & = & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 & = & a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ a^3 - b^3 & = & (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^3 + b^3 & = & (a+b)(a^2 - ab + b^2) \end{array}$$

Exercice 4
Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = (2 + \sqrt{3})^2$ $\quad B = (\sqrt{12} - \sqrt{75})^2$ $\quad C = (6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5})$

$D = (x + y + z)^2$ $\quad E = (x + 2y + z)^2 - (x - y)^2$ $\quad F = (2x - 1)^2 - (x - 3)(2x + 1)$

$G = (2x - 3 + y)^2$ $\quad H = (x - 3y)^3$ $\quad I = (x - 2y)^4$

Exercice 5
Factoriser au mieux les expressions suivantes :

$A = (x + 1)(2x - 3) - (x^2 - 1)$ $\quad B = (3x - 1)^2 - (x + 5)^2$ $\quad C = 4x^2 - 9$

$D = (x^2 - 9) + (2x - 6)(x + 7)$ $\quad E = (2x - 1)(x + 3) - (2 - 4x)(1 - x)$ $\quad F = x^4 - 4x^2$

Polynômes du premier et second degrés

Propriété 5 (d'un polynôme du premier degré)

Soient a, b deux réels, $a \neq 0$, et $P(x) = ax + b$ un polynôme du premier degré.
Alors P admet **une unique racine** égale à $-\dfrac{b}{a}$ et on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$P(x)$		signe de $-a$	0	signe de a	

Propriété 6 (d'un polynôme du second degré)

Soient a, b, c trois réels, $a \neq 0$, et $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.
On appelle **discriminant** du polynôme P le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, P admet **deux racines distinctes** $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et on a la factorisation suivante :
$$P(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.$$
On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- Si $\Delta = 0$, P admet **une unique racine double** $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et on a la factorisation suivante :
$$P(x) = a\,(x - x_0)^2\,.$$
On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta < 0$, P admet **aucune racine** et il ne peut pas être factorisé. En particulier, $P(x)$ est non nul pour tout $x \in \mathbb{R}$ et du signe du coefficient a :

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	

Exercice 6

1. Mettre les trinômes suivants sous forme factorisée après avoir déterminé leurs racines :

$$A(x) = x^2 + 4x + 3 \qquad B(x) = 3x^2 + 6x - 9 \qquad C(x) = 2x^2 - 3x + 1$$
$$D(x) = 2x^2 + 8x + 8 \qquad E(x) = 2x^2 + 5x + 6 \qquad F(x) = 2x^2 + 5x - 3$$

2. Factoriser au mieux les expressions suivantes :

$$G(x) = x^3 - 27 \qquad H(x) = x^4 - 16 \qquad I(x) = (x^2 + 2x - 3)^2 - (x^2 + x - 2)^2$$
$$J(x) = 64x^3 + \frac{1}{8} \qquad K(x) = (2x + 1)^3 - (8x + 4) \qquad L(x) = (2x + 1)^3 + (2x - 1)^3$$

Exercice 7
Résoudre les équations suivantes :

(E_1) $3x - 7 = 1 - 5x$ $\qquad$ (E_2) $3(3 + 2x) + (2x - 1) = 8$ $\qquad$ (E_3) $\dfrac{2 - 3x}{3} = \dfrac{-4 + x}{4}$

(E_4) $3x^2 - 7x + 4 = 0$ $\qquad$ (E_5) $(-x^2 + 2x - 2)^2 = (x^2 + x - 3)^2$ $\qquad$ (E_6) $(9x^2 - 1)^2 = (3x + 1)^2$

Exercice 8
Résoudre les inéquations suivantes :

(I_1) $4x - 13 < 3$ $\qquad$ (I_2) $2(7 - x) \geq x - 1$ $\qquad$ (I_3) $2(x + 3) \leq \dfrac{4x - 8}{2}$

(I_4) $x^2 - 5x + 6 < 0$ $\qquad$ (I_5) $x^2 - 7x \geq -6$ $\qquad$ (I_6) $x^3 - x > 3x^2 - 3$

(I_7) $2x^2 - 3 > x^2 - 6$ $\qquad$ (I_8) $3x^2 + x + 1 < 0$ $\qquad$ (I_9) $x(x + 2) < (2x - 1)(x + 2)$

Fonctions exponentielle et logarithme

Propriété 7 (Propriétés algébriques des fonctions exponentielle et logarithme)

Pour tous réels $x, y > 0$ et pour tout entier n,

(1) $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$.

(2) $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

(3) $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

(4) $\ln(1) = 0$.

(5) $e^{\ln(x)} = x$

Pour tous réels x, y et pour tout entier n,

(6) $e^{x+y} = e^x \times e^y$.

(7) $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.

(8) $e^{nx} = (e^x)^n$.

(9) $e^0 = 1$.

(10) $\ln(e^x) = x$.

Exercice 9
Simplifier au mieux les expressions suivantes :

$$A = e^{5\ln(2)} \qquad B = \ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3}) \qquad C = 2\ln(4) - 3\ln(2)$$
$$D = \ln(\sqrt{6} - 2) + \ln(\sqrt{6} + 2) \qquad E = \frac{e^{a+b}}{e^{a-b}} \times \frac{e^{2a-b}}{e^{2a+b}} \qquad F = \frac{e^7 \times (e^{-5})^2}{e^{-3}}$$
$$G = \ln(\sqrt{\sqrt{17} - 4}) + \ln(\sqrt{\sqrt{17} + 4}) \qquad H = \ln(2) - 3\ln(4) + \ln(32) \qquad I = \frac{\ln(e^2) + e^6 - 2}{e^8 \times e^{-2}}$$
$$J = \frac{\ln(20) - 2\ln(2) + \ln(5)}{\ln(25)} \qquad K = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{e^2 - 1}{e^2}\right) \qquad L = \ln\left(\frac{\frac{e^2}{e^2 - 1}}{\frac{e^2}{e^2 - 1} - 1}\right)$$

Dérivation

Voici les formules sur les dérivées à connaître par coeur !

Fonction	Fonction dérivée
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Exercice 10

Sans s'occuper du domaine de validité des calculs effectués, dériver les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 7 \qquad f_2(x) = (x^2+x+1)^3 \qquad f_3(x) = \frac{2x+3}{4x-5}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x^3+1} \qquad f_5(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \qquad f_6(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f_7(x) = (5x^2-1)\sqrt{2x-3} \qquad f_8(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad f_9(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$$

$$f_{10}(x) = x^2\ln(x) \qquad f_{11}(x) = \ln(3x^2+1) \qquad f_{12}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$f_{13}(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \qquad f_{14}(x) = x^2e^{-x} \qquad f_{15}(x) = \sqrt{1+e^x}$$

$$f_{16}(x) = \ln(1+e^{-x}) \qquad f_{17}(x) = \sqrt{\ln(x)} \qquad f_{18}(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}$$

$$f_{19}(x) = e^{x\ln(x)} \qquad f_{20}(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}}} \qquad f_{21}(x) = \ln(\ln(x))$$